4015.6

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ТГПУ)

«УТВЕРЖДАЮ»
____________А.Н. Макаренко
декан физико-математического факультета
«_31_» ___августа___2010 года

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ОПД.Ф.06 «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, МЕТОДЫ И ТЕОРИИ»

Направление **050200.62 Физико-математическое образование**

Профессионально-образовательные профили: **Физика, Информатика**

Степень (квалификация) выпускника – **бакалавр физико-математического образования**

1. Цели и задачи дисциплины

1.1. **Цель** курса – дать понятие о моделях различных теорий в алгебре и геометрии, отработать методы доказательств.

1.2. **Задачи**:

- Изучить теорию комплексного числа, познакомить с изоморфными моделями этой теории.
- Изучить теорию линейного пространства, рассмотреть различные модели линейного пространства.
- Изучить теорию линейных операторов.
- Изучить построение аксиоматических теорий в алгебре и геометрии.
- Изучить теорию вещественного и комплексного переменного.

1.3. **Перечень дисциплин**, усвоение которых необходимо для изучения данного курса.

Данный курс базируется на знаниях и методах, изучаемых в средней школе и на курсе «Математика» (линейная алгебра и аналитическая геометрия)

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

В результате изучения курса студент должен приобрести следующие возможности:

- умение работать с комплексными числами; знать различные модели теории комплексных чисел;
- знание теории систем линейных уравнений;
- умение решать задачи, связанные с понятием линейного пространства, линейного операторов, билинейных форм;
- знание аксиоматических теорий в алгебре и геометрии;
- знание теории вещественного и комплексного переменного; умение решать задачи этой теории;
- умение применять полученные знания при изучении других дисциплин.

3. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры		
		2	3	4
Общая трудоемкость дисциплины	350			
Аудиторные занятия	162			
Лекции	108	38	36	34
Практические занятия (ПЗ)	54	19	18	17
Семинары (С)				
Лабораторные работы (ЛР)				
И (или) другие виды занятий				
Самостоятельная работа	188	70	70	48
Курсовой проект (работа)				
Расчетно-графические работы				
Реферат				
И (или) другие виды самостоятельной работы				
Вид итогового контроля (зачет)		зачёт	зачёт	экзамен

4. Содержание дисциплины

4.1. Разделы дисциплины и виды занятий (Тематический план)

№ п/п	Раздел дисциплины	Лекции	Практика	Сам. работа
	II семестр	**38**	**19**	**70**
1	Теория комплексного числа.	10	7	20
2	Теория и модели линейного пространства.	18	6	20
3	Линейные операторы.	10	6	30
	III семестр	**36**	**18**	**70**
4.	Основные классы алгебраических систем.	4	–	4
5.	Упорядоченные алгебраические системы.	4	4	8
6.	Аксиоматическая теория натурального числа.	4	4	8
7.	Аксиоматическая теория **Z**.	4	2	6
8.	Аксиоматическая теория **Q**.	4	4	6
9.	Различные модели **R**.	4	2	8
10.	Аксиоматическая теория **C**.	4		10
11.	Исторический обзор обоснования геометрии	4	2	10
12.	Общие вопросы аксиоматики.	4	-	10
	IV семестр	**34**	**17**	**48**
13.	Теория сходимости в метрических пространствах.	8	6	10
14.	Теория меры и измеримых множеств.	8	2	10
15.	Интеграл Лебега и его свойства.	8	4	10
16.	Теория аналитических функций.	8	2	10
17.	Интеграл по комплексной переменной. Интеграл Коши.	2	3	8

4.2. Содержание разделов дисциплины

Тема 1. *Теория комплексного числа.*

Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра и ее применение для получения формул тригонометрических функций кратного аргумента. Извлечение корней n-й степени из комплексного числа.

Тема 2. *Теория и модели линейного пространства.*

Определение линейного пространства, примеры. Подпространство векторного пространства и его признак. Линейная оболочка системы векторов. Изоморфизм векторных пространств. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Основная теорема о линейной зависимости системы векторов и следствия из нее. Координаты вектора и их преобразование при переходе от одного базиса к другому. Классификация систем линейных уравнений по количеству решений. Критерий совместности. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Однородная система линейных уравнений, ее пространство решений. Фундаментальная система решений (ФСР), признак ее существования, количество векторов в ФСР, нахождение ФСР. Связь между решениями неоднородной и приведенной однородной систем линейных уравнений.

Тема 3. *Линейные операторы.*

Линейные отображения и операторы. Операции над линейными отображениями и операторами. Матрица линейного оператора. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. Ранг и дефект линейных операторов. Обратимость линейного оператора. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейные операторы с простым спектром. Приведение матрицы к диагональному виду.

Тема 4. Основные классы алгебраических систем.

Алгебраические системы с одной и двумя бинарными операциями. Гомоморфизм и изоморфизм. Теорема о конгруэнции. Принцип расширения.

Тема 5. Упорядоченные алгебраические системы.

Упорядоченные кольца и поля, их свойства. Положительный конус кольца. Теоремы о существовании и единственности порядка в кольцах. Продолжение порядка.

Тема 6. Аксиоматическая теория натурального числа.

Формулировка аксиоматической теории натурального числа. Построение полукольца на множестве **N**. Введение порядка на **N** и его свойства. Независимость аксиоматики Пеано. Метод математической индукции. Свойства аксиоматики Пеано.

Тема 7. Аксиоматическая теория целого числа.

Формулировка аксиоматической теории целого числа. Свойства кольца целых чисел. Упорядочивание кольца **Z**. Свойства аксиоматической теории **Z**.

Тема 8. Аксиоматическая теория рационального числа.

Формулировка аксиоматической теории рационального числа. Свойства поля **Q**. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Упорядочивание поля **Q**. Свойства аксиоматической теории **Q**.

Тема 9. Различные системы модели R.

Различные подходы к определению системы действительного числа. Построение моделей **R** по Дедекинду, Кантору и Вейерштрассу. Формулировка аксиоматической теории **R**. Теоремы о существовании супремума, извлечении корней. Свойства аксиоматической теории **R**.

Тема 10. Аксиоматическая теория комплексного числа.

Формулировка аксиоматической теории комплексного числа. Свойства поля **C**. О порядках на **C**. Модель **C**.

Тема 11. Исторический обзор обоснования геометрии.

Этапы развития геометрии. Пятый постулат Евклида и его эквиваленты. Открытие неевклидовой геометрии. Возникновение современной аксиоматики евклидовой геометрии. Система аксиом Гильберта. *Аксиома Лобачевского и её простейшие следствия.* Некоторые факты геометрии плоскости Лобачевского. Определение и свойства параллельных и расходящихся прямых. Угол параллельности и функция Лобачевского.

Тема 12. Общие вопросы аксиоматики.

Понятие о математической структуре. Примеры некоторых математических структур. Интерпретации системы аксиом. Непротиворечивость, независимость, полнота системы аксиом. Непротиворечивость и полнота системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Аксиоматика школьного курса геометрии.

Тема 13. Теория сходимости в метрических пространствах.

Пространства: метрические пространства, метрика и норма, примеры. Сходимость в метрических пространствах, фундаментальные последовательности и полные пространства.

Тема 14. Теория меры и измеримых множеств.

Измеримые функции и их свойства. Мера Лебега.

Тема 15. Интеграл Лебега и его свойства.

Сравнение интегралов Римана и Лебега.

Тема 16. Теория аналитических функций.

Определение функции комплексной переменной и ее геометрическое истолкование. Последовательность комплексных чисел и её предел. Предел функции комплексной переменной. Непрерывность. Понятия производной функции комплексной переменной. Дифференциал. Условие дифференцируемости функции комплексной переменной. Понятие аналитической функции. Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по её действительной (мнимой) части. Элементарные аналитические функции в комплексной области: показательная и тригонометрическая функции в комплексной области и их свойства. Применение формул Эйлера. Логарифмы комплексных чисел.

Тема 17. *Интеграл по комплексной переменной. Интеграл Коши.*

Понятие интеграла от функции комплексной переменной и его свойства. Интегральная теорема Коши для односвязной области, интегральная теорема для многосвязной области. Интегральная формула Коши и ее следствия. Применение формулы Коши к вычислению определенных интегралов.

5. Лабораторный практикум

Не предусмотрен.

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

6.1. Рекомендуемая литература

а) основная литература:

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – Изд. 11-е, испр. – М.: Физматлит, 2007. – 307 с.
2. Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: [учебное пособие] / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева. – Изд. 2-е, перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 494 с.
3. Ильин, В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для вузов / В.А. Ильин, Г.Д. Ким – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ; 2002. – 320 с.
4. Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной: учебное пособие для вузов / И.П. Натансон – М.: Наука, 2008. – 560 с.
5. Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие для вузов / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 2006. – 312с.

б) дополнительная литература:

6. Ильин, В. А. Высшая математика: учебник для вузов/В. А. Ильин, А. В. Куркина. – 3-е изд., перераб. и доп.- М.: Проспект [и др.], 2008. – 591с.
7. Хрестоматия по истории математики / сост.: Б. А. Розенфельд и др.; под ред. А. П. Юшкевича.- М.: Просвещение, 1976. – 318с.
8. Брудно, А.Л. Теория функций действительного переменного: учебное пособие для вузов/А.Л. Брудно. - М.: Наука, 1971. – 308с.
9. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного: учебное пособие для вузов / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 158с.
10. Матрос, Д.Ш. Элементы абстрактной и компьютерной алгебры / Д.Ш. Матрос. – М.: Академия, 2004. – 237с.

6.2. Средства обеспечения освоения дисциплины:

Рабочие программы по алгебре, методические указания, разработки, пособия, хранящиеся на кафедре математики, теории и методики обучения математики ТГПУ

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины.

Не предусмотрено.

8. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины.

8.1. Методические рекомендации для преподавателей

Изложение курса должно строиться на уровне строгости, принятой в настоящее время в современной математике. Изучение каждого раздела программы предполагает подробные доказательства основных приводимых результатов. В связи с тем, что на дисциплину отведено ограниченное количество времени, допустимо обзорное изложение неосновных результатов на лекциях с предложением провести подробные доказательства некоторых из них самостоятельно. Это поможет выработать у студентов навыки самостоятельной работы с литературой.

Изложение всех разделов курса должно сопровождаться приведением большого числа примеров, решением достаточного количества задач и упражнений, как соответствующих духу общего теоретического изложения, так и элементарного типа, близкого к школьной математике.

8.2. Методические указания для студентов

Студентам предлагается использовать рекомендованную литературу для более прочного усвоения учебного материала, изложенного в лекциях, а также для изучения материала, запланированного для самостоятельной работы. Студентам необходимо выполнить индивидуальные задания по основным темам курса, оценки за которые учитываются при сдаче зачёта. Выполнение заданий, вынесенных на самостоятельную работу, проверяются преподавателем в течение семестра, по ним выставляются оценки, которые также учитываются при сдаче зачёта или экзамена.

Целью самостоятельной работы является глубокое понимание и усвоение курса лекций и практических занятий, подготовка к выполнению контрольных работ, к сдаче зачета и (или) экзамена, овладение профессиональными умениями и навыками деятельности, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Для успешной подготовки и сдачи зачета (экзамена) необходимо проделать следующую работу:

- Изучить теоретический материал, относящийся к каждому из разделов.
- Выработать устойчивые навыки в решении типовых практических заданий.
- Выполнить контрольные работы, проводимые в течение семестра.

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.

1. Построение поля комплексных чисел **C**.
2. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.
3. Тригонометрическая форма комплексного числа и действия с комплексными числами в тригонометрической форме.
4. Извлечение корня n-ой степени из 1.
5. Теорема Кронекера-Копелли.
6. Связь между решениями неоднородной и приведенной однородной систем линейных уравнений.
7. Линейные операторы. Операции над операторами.
8. Матрица линейного оператора. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах.

9. Обратимость линейного оператора.

Примерный перечень вопросов к зачету (2 семестр)

1. Комплексные числа как точки плоскости. Операции, свойства операций.
2. Алгебраическая форма записи числа. Равенство комплексных чисел. Сопряжённое число. Операции над числами в алгебраической форме записи. Степени числа i.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Формулы перехода от алгебраической к тригонометрической форме записи. Равенство комплексных чисел в тригонометрической форме записи.
4. Операции над числами в тригонометрической форме записи. Формула Муавра-Лапласа.
5. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.
6. Системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений. Виды систем линейных уравнений.
7. Линейное арифметическое пространство. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Частные случаи линейной зависимости систем из одного и двух векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов.
8. Базис системы векторов. Теорема о базисе. Теорема о двух системах, следствия из неё. Ранг системы векторов.
9. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Копелли (критерий совместности системы линейных уравнений).
10. Вычисление ранга матрицы. Минор k-го порядка. Минорный ранг матрицы. Окаймляющий минор. Теорема об окаймляющих минорах. Алгоритм вычисления ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
11. I алгоритм исследования систем линейных уравнений.
12. Исследование систем линейных уравнений по методу Гаусса.
13. Линейное подпространство линейного пространства $\langle V, +, \circ_{\mathbf{R}}\rangle$. Примеры. Критерий линейного подпространства.
14. Линейное подпространство решений однородной системы. Фундаментальная система решений. Теорема о базисе пространства решений однородной системы.
15. Линейное многообразие линейного пространства $\langle V, +, \circ_{\mathbf{R}}\rangle$. Примеры. Критерий равенства линейных многообразий.
16. Линейное многообразие решений неоднородной системы. Запись общего решения неоднородной системы через фундаментальную систему решений приведённой однородной системы.
17. Отображение. Образ, прообраз. Инъективные, сюръективные и биективные отображения. Примеры.
18. Композиция отображений. Теорема о произведении инъективных и сюръективных отображений.
19. Тождественное отображение. Обратное отображение. Критерий обратимости.
20. Определение и простейшие свойства линейного оператора. Задание линейного оператора.
21. Матрица линейного оператора. Теорема о взаимно однозначном соответствии между линейными операторами и матрицами.
22. Координаты вектора и его образа. Теорема о связи матриц линейного оператора в различных базисах.

23. Линейное пространство операторов.
24. Умножение линейных операторов.
25. Обратный оператор.
26. Определение изоморфизма линейных пространств и его свойства.
27. Определение, ранг, дефект линейного оператора.
28. Собственные векторы и собственные векторы линейного оператора.

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.

1. Определить умножение на **N** и изучить его свойства.
2. Количественная теория **N**.
3. Система аксиом ZFC. Аксиома выбора.
4. Пусть a/b – правильная несократимая дробь, где $b = 2^i \cdot 5^j \cdot c$. Исследовать вопрос о длине периода.
5. Построить на множестве $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$ модель теории **C**.

Примерный перечень вопросов к зачёту (3 семестр)

1. Теорема о свойствах сюръективного гомоморфизма.
2. Теорема о конгруэнции.
3. Критерий упорядочивания колец, полей.
4. Свойства положительных конусов кольца.
5. Критерий продолжения порядка.
6. Аксиоматика Пеано. Обоснование метода математической индукции.
7. Построение полукольца на множестве **N**.
8. Введение и свойства порядка на **N**.
9. Теоретико-множественная модель **N**.
10. Свойства аксиоматики Пеано.
11. Определение системы **Z**. Доказать, что <**Z**, · , +> – область целостности.
12. Упорядочивание кольца целых чисел.
13. Модель теории **Z.**
14. Аксиоматическая теория **Q**. Свойства рациональных чисел.
15. Упорядочивание поля **Q**.
16. Непротиворечивость теории **Q**.
17. Построение поля на множестве всех сечений в **Q**.
18. Доказать, что поле P_1 (множество всех сечений в **Q**) можно линейно и строго упорядочить.
19. Теорема об извлечении корня в $\mathbf{R}_Д$.
20. Теорема Дедекинда.
21. Свойства фундаментальных последовательностей произвольного линейно строго упорядоченного поля.
22. Построение области целостности на множестве Ф всех фундаментальных сечений поля **Q**.
23. Построение модели Кантора системы действительных чисел.
24. Аксиоматическая теория **C** (обзор).
25. Система аксиом Вейля аффинного пространства A_n.
26. Пятый постулат Евклида и его эквиваленты.

27. Аксиома Лобачевского. Параллельные прямые на плоскости Лобачевского.
28. Требования, предъявляемые к системе аксиом.

Примерный перечень вопросов к экзамену (4 семестр)

1. Открытые множества и их структура.
2. Замкнутые множества и их структура.
3. Мера открытого множества и её свойства.
4. Мера замкнутого множества и её свойства.
5. Нульмерные множества. Примеры.
6. Мера Лебега ограниченного открытого и замкнутого множества.
7. Мера Лебега неограниченного линейного множества. Примеры.
8. Измеримые функции. Примеры. Лемма об измеримости множеств $A(f \le c)$, $A(f \ge c)$, $A(c \le f \le d)$.
9. Измеримость функции непрерывной на открытом множестве.
10. Измеримость функции непрерывной на замкнутом множестве.
11. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции.
12. Верхняя и нижняя суммы Лебега и их свойства.
13. Теорема о существовании интеграла Лебега.
14. Интеграл Лебега от простых функций и его свойства.
15. Основные свойства интеграла Лебега.
16. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
17. Комплексные числовые последовательности: определение, сходимость, свойства (теорема о сходимости, ограниченные последовательности, необходимое и достаточное условия сходимости числовых последовательностей, критерий сходимости Коши).
18. Множества и области на комплексной плоскости – основные понятия и терминология. Комплексные функции комплексного переменного: определение и геометрическая интерпретация. Кривые и области на комплексной плоскости.
19. Предел функции комплексного переменного: определение и геометрическая интерпретация. Свойства функций имеющих предел. Непрерывность функции комплексного переменного: определение и свойства.
20. Дифференцирование функции комплексного переменного: определение производной, дифференцируемые функции и их свойства. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Различные формы условий Коши-Римана. Свойства аналитических функций. Геометрический смысл производной комплексной функции (модуль и аргумент производной). Конформные отображения. Восстановление комплексной функции по ее действительной или мнимой части.
21. Интегрирование комплексной функции действительного аргумента. Интегрирование комплексной функции комплексного аргумента, связь комплексного интеграла с криволинейным интегралом. Интегральная теорема Коши. Формула Коши и ее следствия. Вычисление интегралов с помощью интегральной теоремы и формулы Коши.

Программа составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению **050200.62 физико-математическое образование**.

Программу составил:

Старший преподаватель кафедры математики,
теории и методики обучения математике ____________________ Е.А.Фомина

к.ф.-м.н., доцент кафедры математики,
теории и методики обучения математике ____________________Ю.А. Шайдо

Программа дисциплины утверждена на заседании кафедры математики, теории и методики обучения математике, протокол № 1 от «31» августа 2010г.

Зав. кафедрой ____________________ /Э.Г. Гельфман/

Программа учебной дисциплины одобрена на заседании методической комиссией ФМФ ТГПУ.

Председатель метод. комиссии
физико-математического факультета ______________ Г.К. Разина